Beweis von Satz 3.9:

i) Selbstversuch!

ii) Abzählungen von $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$:

a) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad f(n) := \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ gerade} \\ \frac{1-n}{2}, & n \text{ ungerade} \end{cases}$

Also: $\boxed{\mathbb{N} \text{ gleichmächtig zu } \mathbb{Z}.}$

b) $\boxed{\mathbb{N} \text{ und } \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ gleichmächtig:}}$

$$\begin{array}{llll}
(1,1)^{1} & (1,2)^{2} & (1,3)^{4} & (1,4)^{7} \ldots \\
(2,1)^{3} & (2,2)^{5} & (2,3) & (2,4) \ldots \\
(3,1)^{6} & (3,2) & (3,3) & (3,4) \ldots \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) \ldots
\end{array}$$

c) $\boxed{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ und } \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \text{ gleichmächtig.}}$

$$g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ni (n, m) \mapsto (f(n), m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$$

mit f aus a) ist Bijektion;

d) betrachte die surjektive Abbildung

$$h : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \ni (k, \ell) \mapsto \frac{k}{\ell} \in \mathbb{Q}$$

$$\Longrightarrow \quad g \circ h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q} \quad \text{surjektiv}$$

und mit „Cantor aus b)" folgt:

$\exists$ surjektive Abbildung $\rho : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$

$$\xrightarrow[\text{Def}]{} \quad \boxed{\mathbb{Q} \lesssim \mathbb{N}} \quad 2)$$

Offenbar: $\boxed{\mathbb{N} \lesssim \mathbb{Q}}$ 1)

Aus 1), 2) will man schließen

$\boxed{\mathbb{N} \text{ gleichmächtig zu } \mathbb{Q}}$ 3)

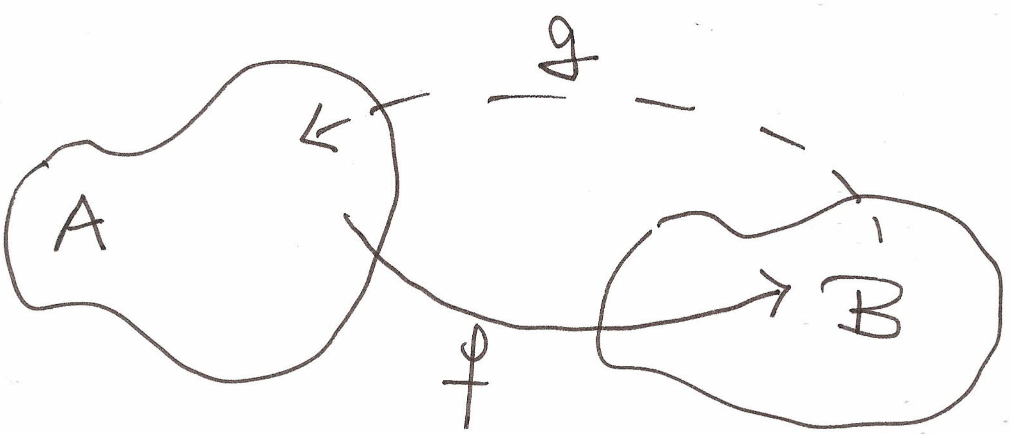
Das geht allgemein mit einem schweren Geschütz

Satz (von Cantor-Schröder-Bernstein):

Seien A, B Mengen mit

$$A \lesssim B, \quad B \lesssim A.$$

Dann sind A, B gleichmächtig.



$\exists\, f, g$ injektiv; finde Bijektion $A \to B$

Somit folgt 3), allerdings kann man mit etwas Sorgfalt eine <u>explizite Bijektion</u> $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ konstruieren.

iii) Sei $\{A_n\}$ eine <u>Folge</u> <u>abzählbarer</u> Mengen.

Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert also eine <u>Bijektion</u> $\boxed{f_n : \mathbb{N} \to A_n}$

Sei dann

$$g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

$$\boxed{g(n,m) := f_n(m)}$$

$\Rightarrow g$ <u>surjektiv</u> $\Longrightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \lesssim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

aus z.B. $A_1 \lesssim \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$

und A_1 gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ folgt:

$$\mathbb{N} \lesssim \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \lesssim \mathbb{N},$$

also mit Cantor – S.-B.: $\mathbb{N}$ und

$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ gleichmächtig.

iv) Wäre $\mathbb{R}$ abzählbar, so könnte man schreiben

$$\mathbb{R} = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$$

mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$;

Konstruktion einer IS $\{I_n\}$

mit

$(1)_n \quad x_n \notin I_n \qquad (2)_n \quad |I_n| = 3^{-n}$

wie folgt:

$$I_1 := \left[x_1 + 1,\ x_1 + \tfrac{4}{3}\right] \quad \left(\Rightarrow (1)_1, (2)_1 \checkmark\right)$$

<u>$n \to n+1$:</u> man zerlegt I_n in <u>3</u> gleiche Teile; I_{n+1} sei eines der Teilintervalle, das x_{n+1} <u>nicht</u> enthält (x_{n+1} kann ersichtlich nicht in allen 3 Teilen liegen, beim „Halbieren" hätte man ein Problem $\leadsto$ Mittelpunkt)

<u>Vollständigkeit</u>: $\exists x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ ⊛

nach Annahme: $x = x_k$ für ein k, aber $x_k \notin I_k$ wegen $(1)_k$, Wspr. zu ⊛.

$\square$

§4 Komplexe Zahlen

Ziel: erweitere $\mathbb{R}$ in sinnvoller Weise so, dass man alle algebraischen Gleichungen lösen kann, etwa

$$\boxed{x^2 + 1 = 0}$$

Annahme: $\exists$ ein solcher Erweiterungskörper $\mathbb{K}$;

wähle $i \in \mathbb{K}$ mit $\boxed{i^2 = -1}$;

(man will sich Info über $\mathbb{K}$ verschaffen und danach $\mathbb{K}$ definieren)

$\mathbb{R} \subset \mathbb{K}$ und Körperaxiome in $\mathbb{K}$ $\Longrightarrow$

$$\boxed{u + iv \in \mathbb{K} \quad \forall u, v \in \mathbb{R}}$$

Für $z = x + iy$, $w = u + iv$

mit $\boxed{x, y, u, v \in \mathbb{R}}$ folgt:

$$z + w = (x+u) + i(y+v)$$

(gemäß Kommutativ- und Distrib.-gesetz),

$$z \cdot w = (x+iy) \cdot (u+iv) =$$

$$x \cdot u + i(xv + yu) + i^2 yv =$$

$$(x \cdot u - yv) + i(xv + yu)$$

Feststellung: Die Teilmenge $\mathbb{K}^* := \{u + iv : u, v \in \mathbb{R}\}$ ist algebraisch abgeschlossen in $\mathbb{K}$.

<u>außerdem gilt</u>:

$$x + iy = u + iv \implies -x + u = i(y - v)$$

$i^2 = -1$

$$\implies (x-u)^2 = -(y-v)^2 \implies x = u \text{ und } y = v$$

<u>D.h.</u>: Ein Element z von $\mathbb{K}^*$ lässt sich <u>eindeutig</u> als $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, darstellen.

<u>Fazit</u>: <u>$\mathbb{K}^*$ wäre bereits die gewünschte Erweiterung</u>.

<u>Formaler Übergang</u>:

$$\mathbb{K}^* \ni x + iy \mathrel{\widehat{=}} (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Def 4.1: a) $\boxed{\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}}$

Menge der komplexen Zahlen

also: $z \in \mathbb{C} :\Longleftrightarrow z = (x,y) \in \mathbb{R}^2$

b) Addition in $\mathbb{C}$:

$$(x,y) + (u,v) := (x+u, y+v)$$

(komponentenweise)

c) Multiplikation in $\mathbb{C}$:

(denke an $(x,y) = x + iy$!)

$$\boxed{(x,y) \cdot (u,v) := (xu - yv,\ uy + xv)}$$

Satz 4.1: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper,

$(0,0)$ neutral bzgl. $+$,

$(1,0)$ — " — $\cdot$,

! $(0,1) \cdot (0,1) = (-1,0)$!

Beweis: langweilig!

Bem: 1.) Sei $z = (x,y) \in \mathbb{C} - \{(0,0)\}$.

Wie sieht $\boxed{z^{-1} = 1/z}$ aus?

Ansatz: $\boxed{z^{-1} = (u,v)} \Longrightarrow (x,y)\cdot(u,v) = (1,0)$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} xu - yv = 1 \\ uy + xv = 0 \end{array} \right\}$$

o. E. $x \neq 0 \Longrightarrow u = \dfrac{1+yv}{x}$

Einsetzen: $\dfrac{1}{x}(1+yv)\,y + x\,v = 0$

$$\Longrightarrow \frac{y}{x} + \frac{v}{x}y^2 + xv = 0$$

$$\Longrightarrow v \cdot \frac{y^2+x^2}{x} = -\frac{y}{x}$$

$$\Longrightarrow \boxed{v = -\frac{y}{y^2+x^2}} \Longrightarrow \boxed{u = \frac{x}{x^2+y^2}}$$

also: $\boxed{(x,y)^{-1} = \frac{1}{x^2+y^2}(x,-y)}$

2) Einbettung von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$:

Sei $f: \mathbb{R} \ni x \mapsto (x,0) \in \mathbb{C} \Longrightarrow$

f ist injektiv mit

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y), \\ f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ $\mathbb{R}$ (algebraisch) isomorph zu $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{C}$

Identifikation: $\boxed{x = (x,0) \text{ für } x \in \mathbb{R}}$

speziell: $0 = (0,0)$, $1 = (1,0)$

definiere die imaginäre Einheit

$$\boxed{i := (0,1)}$$

Dann gilt für $z = (x,y) \in \mathbb{C}$:

$$z \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Rechenregeln in } \mathbb{C}}}{=} x \cdot (1,0) + y \cdot (0,1)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Identifikation}}}{=} \boxed{x + i y}$$

sowie

$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1$$

<u>M.a.W.</u> : Man hat genau die Eigenschaften realisiert, die man eingangs haben wollte.

Def 4.2: Sei $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

a) $x =$ Realteil von z, $\boxed{x = \operatorname{Re} z}$

$y =$ Imaginärteil von z, $\boxed{y = \operatorname{Im} z}$

b) z rein reell $:\Longleftrightarrow \operatorname{Im} z = 0$

z rein imaginär $:\Longleftrightarrow \operatorname{Re} z = 0$

Veranschaulichung in der

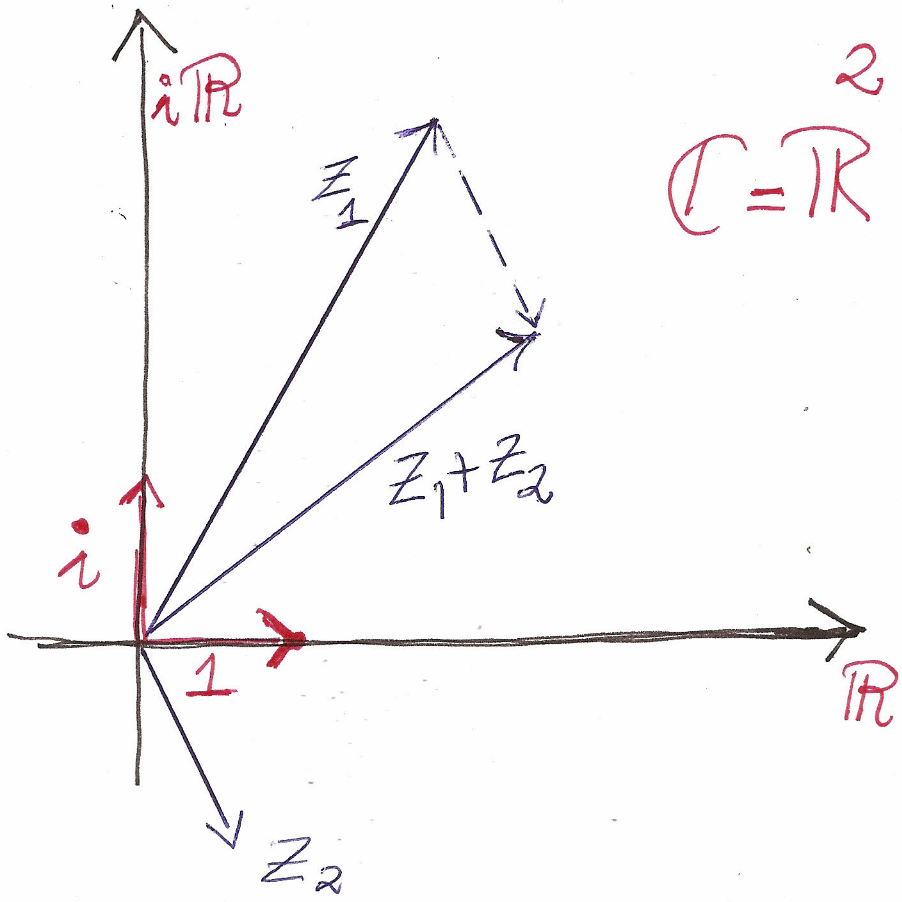
Gaußschen Zahlenebene

Addition in $\mathbb{C}$

= Vektoraddition

in $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$



<u>Wichtige Operation:</u>

Konjugation := Spiegeln an der reellen Achse

$$\left.\begin{array}{l} z = x+iy, \\ x,y\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \longmapsto \overline{z} := x-iy$$

(lies „z quer")

Eigenschaften: $(z, z_1, z_2, w \in \mathbb{C})$ 0) $\boxed{\overline{\overline{z}} = z}$

1.) $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

2.) $\overline{zw} = \overline{z}\cdot\overline{w}$

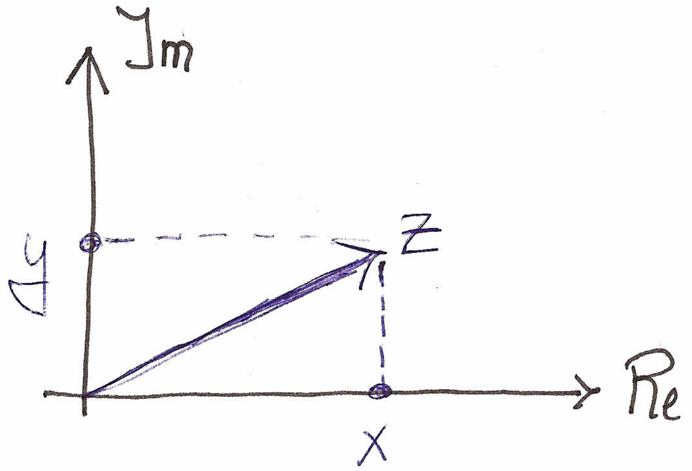
3.) $z+\overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$

4.) $z-\overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}\,z$

5.) $z\overline{z} = (x+iy)\cdot(x-iy) = x^2+y^2 \geq 0$

für $z = x+iy, x,y\in\mathbb{R}$

Komplexe Zahlen sind Punkte in der Ebene $\rightsquigarrow$ sinnvolle Abstandsmessung ist möglich



Abstand von $z = x + iy$ zu 0:

$$\boxed{|z| := \sqrt{x^2 + y^2}}$$

(hier benutzen wir übrigens die Existenz von $\sqrt{}$)

(Euklidische Norm in $\mathbb{C}$ motiviert durch Pythagoras)

Abstand von $z \in \mathbb{C}$ zu $w \in \mathbb{C}$:=

$$|z - w| = \sqrt{\mathrm{Re}^2(z-w) + \mathrm{Im}^2(z-w)}$$

Eigenschaften der Abstandsmessung:

i) $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$; $\boxed{|z|^2 = z \cdot \bar{z}}$

(vgl. 5) von eben)

ii) $|zw| = |z|\,|w|$

iii) $|z+w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungl.)

iv) $|\bar{z}| = |z|$, $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$, $|\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$

Beweis: nur iii), Rest ist offensichtlich; es gilt

$$|z+w|^2 \underset{i)}{=} (z+w)\overline{(z+w)} =$$

$$(z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = z\bar{z} + w\bar{w} + z\bar{w} + \bar{z}w =$$

$$|z|^2 + |w|^2 + z\bar{w} + \bar{z}w$$

nun beachte: $z\bar{w} + \bar{z}w \underset{0),2)}{=}$

$$z\overline{w} + \overline{(z\overline{w})} \underset{3)}{=} 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w})$$

$$\leq 2\,|z\overline{w}| = 2\,|z|\,|\overline{w}| = 2\,|z|\,|w|$$

Also: $$|z+w|^2 \leq |z|^2 + |w|^2 + 2\,|z|\,|w|$$
$$= (|z|+|w|)^2$$

$\Longrightarrow$ iii). $\square$

Bem: Gemäß 5) von vorhin ist

$$\boxed{z\overline{z} = |z|^2} \underset{z \neq 0}{\Longrightarrow} \boxed{\frac{1}{z} = \overline{z}/|z|^2}$$

Bspl: $z = 1 - 5i \Longrightarrow \overline{z} = 1 + 5i$

und $|z|^2 = 26$, d.h.:

$$\frac{1}{1-5i} = \frac{1}{26}(1+5i).$$

Mit der Abstandsmessung auf $\mathbb{C}$ kann man wie üblich definieren

$$K_r(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$$

(offene) <u>Kreisscheibe um $a \in \mathbb{C}$ mit Radius $r > 0$</u>,

$$S_r(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = r\}$$

<u>Kreis um $a \in \mathbb{C}$ mit Radius</u> r, etc.

Dass schließlich die konstruierte Menge $\mathbb{C}$ die eingangs gestellte Forderung nach algebraischer Abgeschlossenheit erfüllt, zeigt der

<u>Fundamentalsatz der Algebra</u>:

Für $n \in \mathbb{N}$ und gegebene Koeffizienten $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$ hat die algebraische Gleichung

$$\boxed{z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k = 0}$$

mindestens eine Lösung $z_1 \in \mathbb{C}$.

Ist $n > 1$, so kann man das Polynom durch $z - z_1$ dividieren $\Longrightarrow$

$\exists$ 2te Lösung z_2 (nicht notwendig $\neq z_1$),

usw.

$\Longrightarrow$ $\exists$ n Lösungen $z_1, \ldots, z_n$
(nicht notwendig verschieden) $\square$

Beweis: evtl. später mit Sätzen über stetige Funktionen
bzw. „Algebra"